

Arbres tournois, tas-max

Judicaël Courant

Le 5 septembre 2016

1 Arbres tournois

1.1 Introduction

Définition 1 *Un arbre binaire étiqueté par des nombres (ou plus généralement par les éléments d'un ensemble ordonné) est dit arbre tournoi si l'étiquette de tout nœud majore l'ensemble de celles de ses descendants.*

Exercice 1 *Voici trois affirmations :*

1. *On peut tester si un arbre est tournoi en temps quadratique en la taille de l'arbre.*
2. *Un arbre est tournoi si et seulement si, pour chaque nœud de l'arbre, chaque fils non-vide a une racine inférieure ou égale à celle du nœud considéré.*
3. *On peut tester si un arbre est tournoi en temps linéaire en la taille de l'arbre.*

Combien de ces affirmations sont vraies ?

- A Zéro
- B Une
- C Deux
- D Trois

1.2 Réalisation d'une file de priorité

- Extraction du maximum : on réalise une *percolation* descendante ;
- Ajout d'un élément : *percolation* montante.

(on utilise également le terme *tamisage* ; en anglais *sink*)

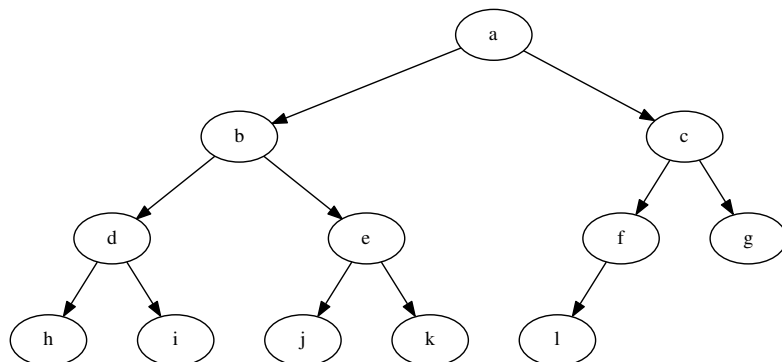
Complexité : $O(h)$ où h est la hauteur de l'arbre considéré.

2 Arbres quasi-complets

2.1 Introduction

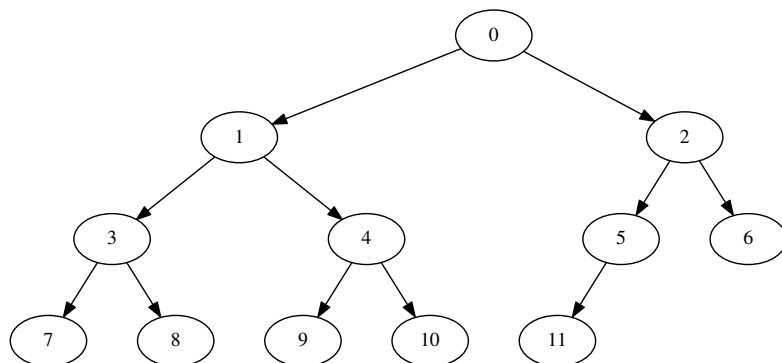
2.1.1 Définition

Définition 2 *Un arbre (quasi-)complet est un arbre de hauteur h où toutes les feuilles sont à profondeur $h - 1$ ou h , les feuilles de profondeur h étant bien tassées sur la gauche.*



2.2 Représentation par un tableau

Numérotons les nœuds d'un arbre quasi-complet par un parcours en largeur d'abord puis de gauche à droite (parcours militaire) en commençant par 0.



2.3 Propriété de la numérotation

Théorème 1 Notons h la hauteur du tas considéré et n son nombre de nœuds.

Alors les numéros des nœuds situés à la profondeur k sont les éléments de

— $\llbracket 2^k - 1, 2^{k+1} - 1 \llbracket$ pour $k \in \llbracket 0, h - 1 \llbracket$.

— $\llbracket 2^{h-1} - 1, n \llbracket$ pour $k = h - 1$.

En posant $q = 2p + 1$ (resp. $2p + 2$), le fils gauche (resp. droit) du nœud numéro p :

— existe ssi $q < n$;

— a pour numéro q s'il existe.

2.4 Démonstration

1. c'est vrai pour les nœuds les plus à gauche de chaque rangée (numéro de la forme $2^k - 1$) ;
2. on effectue une récurrence pour le reste des nœuds de la rangée.

On peut alors représenter un tas de taille n par un tableau de taille n — voire par un tableau de taille supérieure (seuls les n premiers éléments étant pris en compte).

Notons que cette représentation est impérative : on peut modifier un arbre existant (contrairement aux arbres classiques en Caml).

```
type 'a tas == {  
  mutable nb_elem : int;  
  mutable donnees : 'a vect  
};;  
(* cree_tas : int -> 'a -> 'a tas  
  (cree_tas n x) crée un tas (arbre quasi-complet) initialement vide  
  pouvant contenir jusqu'à n éléments du type de x.  
*)  
let cree_tas n x = {  
  nb_elem = 0;  
  donnees = make_vect n x  
};;
```

On peut représenter un sous-arbre par un couple (tas, numéro du noeud où s'enracine le sous-arbre) ou tout simplement par le numéro du noeud. On choisit cette dernière solution :

```
type noeud == int;;  
let racine = 0;;  
let fils_gauche p = 2*p + 1;;  
let fils_droit p = 2*p + 2;;  
let pere p = (p - 1) / 2;; (* div. euclidienne *)  
let est_racine p = (p = 0);;  
  
(* elem : 'a tas -> noeud -> 'a  
  retourne l'étiquette d'un noeud. *)  
let elem t p = t.donnees.(p);;  
  
(* est_vide : noeud -> 'a tas -> bool *)  
let est_vide p t = (p >= t.nb_elem);;  
  
(* swap : 'a tas -> noeud -> noeud -> unit  
  échange les étiquettes des noeuds. *)  
let swap t n1 n2 =  
  let u = t.donnees in  
  let x1 = u.(n1) and x2 = u.(n2) in  
  u.(n1) <- x2;  
  u.(n2) <- x1  
;;
```

Il n'est pas difficile de reconstituer un arbre_bin à partir d'un tas binaire :

```
(* arbre_de_tas : noeud -> 'a tas -> 'a arbre_bin  
  (arbre_de_tas n t) retourne le sous-arbre  
  enraciné au noeud n du tas t.  
*)  
let rec arbre_de_tas p t =  
  if est_vide p t then Vide  
  else let fg = arbre_de_tas (fils_gauche p) t in  
  let fd = arbre_de_tas (fils_droit p) t in  
  N(t.(p), fg, fd)  
;;
```

3 Structure de tas max

Définition 3 *Un tas max est un tas binaire qui est également un arbre tournoi.*

3.1 Opérations usuelles

```
(* maximum : 'a tas -> 'a
   précondition : le tas n'est pas vide
   et vérifie la propriété de tas max *)
```

```
let maximum t = t.donnees.(racine);;
```

Percolation descendante sur un sous-arbre :

```
(* percole_descendant : 'a tas -> int -> unit
   (percole_descendant t p) réorganise le sous-arbre
   enraciné au noeud p par percolation, de façon
   qu'il respecte les conditions de tas max.
   Précondition : le noeud p existe et les éventuels
   fils de p respectent les conditions de tas-max.
   *)
```

```
let rec percole_descendant t p =
  let fg = fils_gauche p in
  let fd = fils_droit p in
  let m = if not(est_vide fg t)&&elem t fg > elem t p
    then fg else p in
  let m' = if not(est_vide fd t)&&elem t fd > elem t m'
    then fd else m in
  if m' <> p then begin
    swap t m' p;
    percole_descendant t m'
  end;;
```

NB : peut évidemment s'écrire avec une boucle **while**.

```
(* extrait_max : 'a tas -> unit
   Modifie le tas pour en enlever le maximum.
   Le tas résultant vérifie encore la propriété de
   tas-max.
   Précondition : le tas n'est pas vide et
   la propriété de tas-max est vérifiée.
   *)
```

```
let rec extrait_max t =
  let v = elem t (t.nb_elem - 1) in
  t.nb_elem <- t.nb_elem - 1;
  t.donnees(racine) <- v;
  percole_descendant t racine;;
```

Percolation montante :

```
(* percole_montant : int -> 'a tas -> unit
   Réorganise le tas par percolation, de façon qu'il
   respecte les conditions de tas max.
```

Précondition : le tas est non-vidé et respecte les conditions de tas max sauf peut-être entre le dernier noeud du tas (le plus en bas à droite) et son père.

*)

```
let percole_montant t =
  let p = ref (t.nb_elem - 1) in
  while !pos <> racine && elem t !pos > elem t (pere !pos) do
    (* les contraintes de tas sont vérifiées partout,
       sauf entre !pos et son père. *)
    let p = pere !pos in
    swap t p !pos;
    pos := p;
  done;;
```

(ajoute_elem : 'a tas -> 'a -> unit
Ajoute l'élément donné au tas.
Conserve la propriété de tas-max.
Précondition : le nombre d'éléments du tas est strictement inférieur à la taille du tableau utilisé *)*

```
let ajoute_elem t x =
  let n = t.nb_elem in
  t.donnees.(n) <- x;
  t.nb_elem <- n + 1;
  percole_montant t
;;
```

3.2 Réalisation d'une file de priorité (impérative)

```
let cree_file_priorite = tas_max__cree_tas;;
let insere = tas_max__ajoute_elem;;
let est_vide = tas_max__est_vide;;
let maximum = tas_max__maximum;;
let extrait_maximum = tas_max__extrait_maximum;;
```

3.3 Construction en $O(n)$ (par forêt)

La construction naïve d'un tas-max de n éléments (par ajout successifs) a un coût temporel $O(n \log n)$.

NB : il est difficile d'améliorer cette borne car $\sum_{k=1}^n \log k = \Theta(n \log n)$ (exercice : le montrer).

Mais on peut faire mieux : on peut commencer par construire un tas de profondeur h à partir des n éléments (sans que ce soit un tas-max), puis effectuer des percolations sur les sous-arbres.

Pour les nœuds situés profondeur $h - 1$, il n'y a rien à faire.

On effectue des percolations descendantes des nœuds de numéros dans $\llbracket 2^{h-2} - 1, 2^{h-1} - 1 \rrbracket$ (deux appels récursifs par nœud au maximum), puis des nœuds de numéros dans $\llbracket 2^{h-3} - 1, 2^{h-2} \rrbracket$ (trois appels récursifs au plus), etc.

À une étape donnée du calcul, on a donc fait en sorte que les l'ensemble des 2^k arbres enracinés à la profondeur k aient la propriété de tas-max.

(Un ensemble d'arbre est une *forêt*, d'où le nom de la construction.)

Au total, le nombre total d'appels sera donc majoré par

$$\sum_{k=2}^h k2^{h-k} \leq 2^h \sum_{k=2}^{+\infty} k2^{-k} = O(2^h) = O(n)$$

On peut donc construire le tas en $O(n)$.

3.4 Tri par tas

3.4.1 Principe

Il consiste à trier un tableau par la méthode suivante :

1. Construire un tas à partir du tableau ;
2. Extraire de ce tas les maximums successifs et les mettre dans le tableau résultat.

Fait remarquable : on peut utiliser le même tableau pour représenter le tableau de sortie et le tas.

3.4.2 Implantation

On peut alors écrire tout le code sans même faire référence au type **tas** :

```
let percole_descendant p t n =
  let pos = ref p in
  let c = ref false in
  while !c do
    let g = 2 * !pos + 1 in
    let d = g + 1 in
    let next = if d < n && t.(d) > t.(g) then d else g in
    if next < n && t.(next) > t.(!pos) then begin
      swap t !pos next;
      pos := next;
    end else c := true
  done;;

let tri_tas t =
  let n = vect_length t in
  for i from (n-2) / 2 (* pere(n-1) *) downto 0 do
    (* pour j > i, t[j] est un tas-max *)
    percole_descendant i t n;
  done;
  for i from n-1 downto 1 do
    (* t[i+1], ..., t[n-1] est trié, et t[0], ..., t[i]
       est un tas-max d'éléments plus petits *)
    swap t racine i;
    percole_descendant racine t i
  done;;
```

NB : Pas besoin de percoler montante.

Complexité : $O(n \log n)$.

3.4.3 Avantages du tri par tas

- Rapide ;
- En place ;
- Raisonnablement court ;

3.4.4 Inconvénients

- Non stable ;
- Incompréhensible sans les concepts.