Espaces vectoriels de dimension finie – TD

16 mars 2010

1 Sous-espace de polynômes de dimension finie

On pose $n = 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $F = \{ P \in E \mid P(1) = 0 \}$.

1. Montrer que F est un sous-espace-vectoriel de E.
2. Calculer sa dimension et en donner une base.
3. Trouver un sous-espace vectoriel S de E tel que tout $P \in E$ se décompose de façon unique sous la forme $Q + R$ avec $Q \in F$ et $R \in S$ (on dit que S est un supplémentaire de F dans E). S est-il unique ?
4. Même exercice avec $n = 3$.
5. Même exercice avec n quelconque ($n \geq 2$).

2 Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit f une application linéaire de E dans F.

On suppose que Im f est de dimension finie n, et on se donne une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de Im f. On se donne e_1, ..., e_n des antécédents respectifs de f_1, ..., f_n.

On suppose que Ker f est de dimension finie k, et on se donne une base $(e_{n+1}, \ldots, e_{n+k})$ de Ker f.

1. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_{n+k})$ est libre.
2. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $x' \in E$ vérifiant $x' \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et $f(x') = f(x)$. Montrer qu'on a alors $x - x' \in \mathrm{Ker}\ f$. En déduire que $(e_1, \ldots, e_{n+k})$ est génératrice.
3. En déduire le théorème du rang : pour tous espaces vectoriels E et F et toute application linéaire f de E dans F, si le noyau et l'image de f sont de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\mathrm{dim}E = \mathrm{dimKer}\ f + \mathrm{dimIm}\ f$.

3 Image réciproque d'un ev

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E.

On pose $G_F = \{ x \in E \mid f(x) \in F \}$.

1. Montrer que G_F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\ f \leq \dim G_F \leq \dim \mathrm{Ker}\ f + \mathrm{dim}F$.

4 Noyaux successifs

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p un entier naturel non nul, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme surjectif.

Soit ϕ l'application définie par $\forall x \in \mathrm{Ker}\ f^p\ \ \phi(x) = f(x)$.

1. Montrer $\phi \in \mathcal{L}(\mathrm{Ker}\ f^p, \mathrm{Ker}\ f^{p-1})$.
2. Déterminer Ker ϕ.
3. Montrer que ϕ est surjective de Ker f^p sur Ker f^{p-1}.
4. Montrer que si Ker f^p est de
5. Lorsque Ker f est de dimension finie, en déduire que pour tout p, Ker p est de dimension finie et calculer sa dimension en fonction de p et de dimKer f.

5 Matrice d'une AL

Soit E l'espace vectoriel des vecteurs du plan muni d'une base orthonormée (i,j). Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note u_θ l'endomorphisme de E qui à tout x associe le vecteur y de même norme que x et tel que l'angle (x,y) soit de mesure θ et M_θ la matrice de u_θ. Calculer M_θ.

6 «Racine carrée» d'une matrice particulière

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 17 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Déterminer Ker u et Im u.
2. Déterminer une base $\mathcal{B} = (i,j,k,l)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est B.
3. Trouver $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $v^2 = u$. Puis déterminer une matrice C vérifiant $C^2 = A$. v est-il unique ? C est-elle unique ?

7 Base d'un espace vectoriel donné par un système linéaire

Montrer que les solutions du système homogène de matrice associée

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 19 & -9 \\ -11 & 4 & 26 & -12 \\ -22 & 8 & 52 & -24 \end{pmatrix}$$

forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Le résoudre. En déduire une base de ce sous-espace vectoriel.

Même question avec les matrices $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 & -11 \\ -13 & 0 & 21 & -26 \\ -10 & -11 & -22 & -53 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & 4 \\ -3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

8 Base d'un espace vectoriel donné par un vect

Dans un espace vectoriel de dimension 3, on se donne une base B et on considère 5 vecteurs $u_1, \ldots, u_5$, dont les coordonnées sont les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 11 & 10 & 10 & -5 \\ 4 & -15 & -14 & -14 & 6 \\ -5 & 18 & 16 & 16 & -9 \end{pmatrix}$$

Donner une base de $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_5)$ et en déduire sa dimension.

9 Calculs de rangs

Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & -3 \\ -3 & -10 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -12 & 2 \\ 10 & -23 & -41 & 6 \\ 2 & -4 & -10 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$